

GÉOMÉTRIE DU PLAN COMPLEXE

MARIE-CLAUDE DAVID

Voici un cours sur la géométrie du plan complexe avec des figures et des exercices interactifs. Avant de l'aborder, il serait bon de maîtriser le contenu et les exercices du cours WIMS : Nombres complexes. Pour l'étude des isométries, il est utile de se référer au document WIMS : Isométries du plan.

Avertissement. Ce cours est une partie de l'option de géométrie enseignée de 2013 à 2015 au premier semestre de la première année de licence MPI à la Faculté des Sciences d'Orsay de l'université Paris Sud. Il s'agissait de pallier l'absence des transformations au Lycée.

TABLE DES MATIÈRES

1. Géométrie du plan complexe	2
1.1. Affixe d'un vecteur, angle orienté de deux vecteurs	2
1.2. Applications à l'étude de lieux	2
2. Ecriture complexe d'une transformation	3
2.1. Exemples	3
2.2. Propriétés générales	4
3. Isométries du plan complexe	4
3.1. Isométries positives	4
3.2. Isométries négatives	5
3.3. Exercices	7
4. Homothétie	7
4.1. Définition	7
4.2. Figure mobile	8
4.3. Homothétique d'un pentagone	8
4.4. Propriétés	9
4.5. Exercices	9
5. Similitudes	10
5.1. Définitions et propriétés	10
5.2. Exemples	10
6. Etude des similitudes qui ne sont pas des isométries	11
6.1. Décomposition canonique d'une similitude qui n'est pas une isométrie	11
6.2. Point fixe d'une similitude directe qui n'est pas une isométrie	11
6.3. Point fixe d'une similitude indirecte qui n'est pas une isométrie	12
6.4. Exercices	13
7. Composition des similitudes	13

7.1. Groupe des similitudes	13
7.2. Similitudes et angles orientés	15
7.3. Composées de similitudes directes	15
7.4. Exercices de composition	16
8. Propriétés des similitudes	16
8.1. Figures semblables	16
8.2. Similitude définie par l'image de deux points donnés	16
8.3. Image d'une droite ou d'un cercle	17

1. GÉOMÉTRIE DU PLAN COMPLEXE

Dans cette partie, on complète les propriétés géométriques des affixes vues dans le document WIMS : Nombres complexes.

1.1. Affixe d'un vecteur, angle orienté de deux vecteurs.

Définition 1.1. Dans le plan orienté par un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère un vecteur \vec{w} de composantes (x, y) ; on appelle *affixe du vecteur* \vec{w} le nombre complexe $\omega = x + iy$.

En particulier, l'affixe de M est égal à celui de \overrightarrow{OM} . L'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est $z_B - z_A$ quand A et B sont des points d'affixes respectives z_A et z_B .

Proposition 1.1. Soient \vec{w} et \vec{w}' deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' . L'angle orienté (\vec{w}, \vec{w}') a pour mesure l'argument de $\frac{z'}{z} = \text{Arg}(z') - \text{Arg}(z)$.

Pour A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B et C et D deux points distincts d'affixes respectives z_C et z_D , l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ a pour mesure l'argument de $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$.

Démonstration. Par relation de Chasles, on a

$$(\vec{w}, \vec{w}') = (\vec{u}, \vec{w}') - (\vec{u}, \vec{w}) = \text{Arg}(z') - \text{Arg}(z) = \text{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right).$$

La formule est démontrée et s'applique à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ pour donner :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

□

Exercice 1.

WIMS : Angle et quotient de complexes

1.2. **Applications à l'étude de lieux.** Ces descriptions sont des applications directes des propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexes.

Soient A, B et M des points d'affixes respectives a, b et m .

- (1) L'ensemble des points M vérifiant $|m - a| = |m - b|$ est la médiatrice de $[AB]$, ensemble des points équidistants de A et B .

- (2) L'ensemble des points M vérifiant $|m - a| = |a - b|$ est le cercle centré en A passant par B .
- (3) L'ensemble des points M vérifiant $|m| < 1$ est le disque unité ouvert (c'est-à-dire le disque sans le cercle unité).
- (4) L'ensemble des points M vérifiant $|m| \leq 1$ est le disque unité fermé (c'est-à-dire avec le cercle unité).
- (5) L'ensemble des points M vérifiant $m + \bar{m} = 1$ ne contient pas O donc on peut poser $m = re^{i\theta}$; la condition s'écrit alors $2r\cos(\theta) = 1$. L'ensemble des points M vérifiant $m + \bar{m} = 1$ est la droite $x = \frac{1}{2}$.
- (6) L'ensemble des points M vérifiant $m - \bar{m} = i$ ne contient pas O donc on peut poser $m = re^{i\theta}$; la condition s'écrit alors $2r\sin(\theta) = 1$. L'ensemble des points M vérifiant $m - \bar{m} = i$ est la droite $y = \frac{1}{2}$.
- (7) Les points M tel que $\frac{m-a}{m-b}$ soit égal à $\pm i$ sont les intersections du cercle de diamètre $[AB]$ et de la médiatrice de $[AB]$ en effet le triangle ABM est rectangle isocèle en M .
- (8) Les points M tel que $\frac{m-a}{m-b}$ soit un imaginaire pur sont les points différents de B du cercle de diamètre $[AB]$ en effet le triangle ABM est rectangle en M .

Exercices 1. Déterminer le troisième sommet d'un triangle.

- WIMS : Triangle isocèle (1)
- WIMS : Triangle isocèle (2)
- WIMS : Triangle équilatéral

2. ECRITURE COMPLEXE D'UNE TRANSFORMATION

Un point dans le plan avec un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) peut être déterminé par ses coordonnées (x, y) ou son affixe $z = x + iy$. Ainsi on peut définir une transformation en donnant pour chaque point les coordonnées de son image ou son affixe.

Définition 2.1. Soient deux nombres complexes a (non nul) et b . On s'intéresse aux transformations $R_{a,b}$ et $S_{a,b}$ définies pour $z \in \mathbb{C}$ par :

$$R_{a,b}(z) = az + b \quad \text{et} \quad S_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$$

2.1. Exemples. Les transformations présentées ici sont définies dans le document WIMS : Isométries du plan sauf l'homothétie (voir en 4.1).

On considère M et M' d'affixes respectifs z et z' .

- La transformation $R_{1,b}$ est la **translation** de vecteur \vec{b} d'affixe b .
En effet, de $z' = z + b$, on tire : $\overrightarrow{MM'} = \vec{b}$ puisque $z' - z$ est l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$.
- La transformation $R_{-1,2c}$ est la **symétrie centrale** de centre C d'affixe c .
en effet, de $z' = -z + 2c$, on tire $c = \frac{z+z'}{2}$ donc C est le milieu de $[MM']$.
- Pour λ réel, non nul et différent de 1, et $c \in \mathbb{C}$, $R_{\lambda,c(1-\lambda)}$ est l'**homothétie** de centre C d'affixe c et de rapport λ .
En effet, pour $M' = h(C, \lambda)(M)$, on a : $z' - c = \lambda(z - c)$.

- Pour $\theta \neq 0$, l'image de M par la **rotation** de centre C d'affixe c et d'angle θ est le point M' dont l'affixe vérifie :

$$z' - c = e^{i\theta}(z - c)$$

- La transformation $S_{1,0}$ est la **réflexion** d'axe $y = 0$: $z' = \bar{z}$.
- Pour $\theta \neq 0$ et $a = e^{i\theta}$, $S_{a,0}$ est la **réflexion** d'axe Δ où Δ est la droite passant par O et tel que $((Ox), \Delta) = \frac{\theta}{2}$.
En effet, de $S_{a,0}(z) = e^{i\theta}\bar{z}$, on tire : $S_{a,0} \circ S_{1,0} = R(e^{i\theta}, 0)$.

Exercice 2.

WIMS : Image par une rotation

2.2. Propriétés générales.

Proposition 2.1. Soient $a \neq 0$ et b deux nombres complexes.

Les applications $R_{a,b}$ et $S_{a,b}$ multiplient les longueurs par $|a|$.

Les applications $R_{a,b}$ conservent les angles orientés.

Les applications $S_{a,b}$ transforment un angle orienté en son opposé.

Démonstration. Soient M et N d'affixes respectives z_M et z_N ; on note z'_M et z'_N les affixes de leurs images.

Pour les applications R , on a : $z'_N - z'_M = a(z_N - z_M)$ d'où $|z'_N - z'_M| = |a| \times |z_N - z_M|$.

Pour les applications S , on a : $z'_N - z'_M = a(\bar{z}_N - \bar{z}_M) = a \times \overline{z_N - z_M}$ d'où $|z'_N - z'_M| = |a| \times |z_N - z_M|$.

Dans les deux cas, la longueur $M'N'$ est le produit de NM par $|a|$.

On suppose M et N distincts et on considère deux autres points distincts P et Q d'affixes respectives z_P et z_Q ; on note z'_P et z'_Q les affixes de leurs images.

Pour les applications R , on a : $\text{Arg} \frac{z'_P - z'_Q}{z'_N - z'_M} = \text{Arg} \frac{z_P - z_Q}{z_N - z_M}$ donc les angles orientés sont conservés.

Pour les applications S , on a : $\text{Arg} \frac{z'_P - z'_Q}{z'_N - z'_M} = \text{Arg} \frac{\bar{z}_P - \bar{z}_Q}{\bar{z}_N - \bar{z}_M} = -\text{Arg} \frac{z_P - z_Q}{z_N - z_M}$ donc un angle orienté est transformé en son opposé. \square

3. ISOMÉTRIES DU PLAN COMPLEXE

On suppose dans cette partie que a est de module 1.

D'après la proposition 2.2, les applications étudiées sont donc des isométries.

3.1. Isométries positives.

3.1.1. Etude de $z' = az + b$.

Proposition 3.1. Pour $|a| = 1$, l'application $R_{a,b}$ est une isométrie positive.

- Pour $a = 1$ et $b = 0$, $R_{1,0}$ est l'identité.

- Pour $a = 1$, $R_{1,b}$ est la translation de vecteur \vec{b} d'affixe b .

- Pour $a \neq 1$, on pose $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0$. Alors $R_{a,b}$ est la rotation de centre C d'affixe $c = \frac{b}{1-a}$ et d'angle θ .

Pour chaque translation ou rotation, on peut trouver un couple de nombres complexes (a, b) telle que son expression complexe soit $R_{a,b}$ et ce couple est unique.

Démonstration. Pour l'essentiel, ces résultats ont été vus dans les exemples en 2.1.

L'équation aux points fixes $c = ac + b$ donne la valeur de c . Si on soustrait cette relation à $z' = az + b$, on obtient $z' - c = a(z - c)$, donc $R_{a,b}$ est la rotation de centre C et d'angle $\text{Arg}(a)$. \square

3.1.2. *Exemple.* Soit f l'application du plan complexe définie par :

$$f(z) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + 2(1 + i\sqrt{3})$$

Comme $f(z)$ est de la forme $az + b$ avec $a = e^{-i\pi/3}$ de module 1, f est une isométrie positive qui n'est pas une translation donc c'est une rotation.

Son centre est le point C d'affixe c vérifiant l'équation au point fixe :

$$c = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})c + 2(1 + i\sqrt{3})$$

donc C a pour affixe 4.

L'angle de f est l'argument de $a = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ soit $-\frac{\pi}{3}$.

Pour conclure, f est la rotation $\rho(C, -\frac{\pi}{3})$ où C le point d'affixe 4.

Remarque 1. Pour résoudre l'équation au point fixe, il est recommandé de savoir calculer un quotient de nombres complexes. On trouvera la méthode à cette page WIMS : Quotient de nombres complexes

3.2. Isométries négatives.

3.2.1. *Etude de $z' = a\bar{z} + b$.*

Proposition 3.2. Pour $|a| = 1$, l'application $S_{a,b}$ est une isométrie négative.

- Pour $a\bar{b} + b = 0$, l'application $S_{a,b}$ est une réflexion d'axe passant par le point C d'affixe $\frac{b}{2}$ et faisant l'angle $\text{Arg}(a)/2$ avec l'axe des abscisses. L'axe est aussi la médiatrice de $[OB]$ où $B = S_{a,b}(O)$ est le point d'affixe b .
- Pour $a\bar{b} + b \neq 0$, l'application $S_{a,b}$ est une symétrie glissée composée de la translation de vecteur \vec{d} d'affixe $d = (a\bar{b} + b)/2$ et de la réflexion $S_{a,b'}$ avec $b' = (b - a\bar{b})/2$. Son axe est la droite passant par C d'affixe $\frac{b}{2}$ et dirigée par \vec{d} . Il fait un angle de $\text{Arg}(a)/2$ avec l'axe des abscisses.

Pour chaque réflexion ou symétrie glissée, on peut trouver un couple de nombres complexes (a, b) telle que son expression complexe soit $S_{a,b}$ et ce couple est unique.

Démonstration. Dans cette démonstration, on utilise de manière essentielle, la classification des isométries (WIMS : Isométries du plan).

L'isométrie $S_{a,b}$ est négative donc est une réflexion ou une symétrie glissée.

Considérons le point B d'affixe b , image de O par $S_{a,b}$ et le milieu C (d'affixe $c = \frac{b}{2}$) de $[OB]$. Le point C appartient donc à l'axe de $S_{a,b}$. Alors $S_{a,b}$ est une réflexion si et seulement si C est fixe par $S_{a,b}$.

$$S_{a,b}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{b}{2} \iff \frac{b}{2} = a\overline{\left(\frac{b}{2}\right)} + b \iff a\bar{b} + b = 0$$

Donc C est fixe par $S_{a,b}$ si et seulement si $a\bar{b} + b = 0$.

- Pour $a\bar{b} + b = 0$, l'isométrie $S_{a,b}$ est une réflexion d'axe Δ passant par C .
Si a vaut 1, l'isométrie $S_{1,b}$ est une réflexion d'axe parallèle à l'axe des abscisses. En effet, $S_{1,b} \circ S_{1,0}$ est la translation de vecteur b donc les axes de $S_{a,b}$ et $S_{1,0}$ sont parallèles.
Si a est différent de 1, $S_{a,b}$ est la composée $R_{a,b} \circ S_{1,0}$ donc la rotation $R_{a,b}$ (qui est une rotation d'angle $\text{Arg}(a)$) est la composée $S_{a,b} \circ S_{1,0}$. Donc l'axe de $S_{a,0}$ fait un angle $(\text{Arg}a)/2$ avec l'axe des abscisses, axe de $S_{1,0}$.
Pour toute valeur de a , on a donc $((Ox), \Delta) = \text{Arg}(a)/2$.
On peut aussi remarquer que, comme $S_{a,b}$ est la réflexion qui échange O et B , son axe est la médiatrice de $[OB]$.
- Pour $a\bar{b} + b \neq 0$, calculons $\vec{d} = \overrightarrow{CC'}$ pour C' , image de C par $S_{a,b}$.

$$d = \left[a \left(\frac{b}{2} \right) + b \right] - \frac{b}{2} = \frac{a\bar{b} + b}{2}$$

Sur son axe, la symétrie glissée agit comme la translation de vecteur \vec{d} . L'isométrie $S_{a,b}$ est donc la symétrie glissée composée de la translation de vecteur \vec{d} et de la réflexion $S_{a,b'}$ avec $b' = (-a\bar{b} + b)/2$.

En effet, on a :

$$z' = a\bar{z} + b = \left[a\bar{z} + \frac{-a\bar{b} + b}{2} \right] + \frac{a\bar{b} + b}{2}$$

De plus b' vérifie : $a\bar{b}' + b' = 0$. Donc $S_{a,b'}$ est bien une réflexion et bien sûr, son axe passe par C et est dirigé par \vec{d} .

On peut remarquer que, l'axe de $S_{a,b}$ étant par définition celui de $S_{a,b'}$, il fait donc un angle de $\text{Arg}(a)/2$ avec l'axe des abscisses. □

Remarque 2. L'expression complexe de $S_{a,b} \circ S_{a,b}$ est $z' = z + a\bar{b} + b$. On constate que $S_{a,b}$ est une involution (donc une réflexion) si et seulement si $a\bar{b} + b$ est nul. Sinon $S_{a,b} \circ S_{a,b}$ est la translation de vecteur $2\vec{d}$. Ceci est cohérent avec l'étude précédente.

3.2.2. *Exemple.* Soit g_b l'application du plan complexe définie par

$$g_b(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\bar{z} + b.$$

Comme $g_b(z)$ est de la forme $a\bar{z} + b$ avec $a = e^{i\pi/4}$ de module 1, g_b est un antidéplacement, c'est-à-dire une réflexion ou une symétrie glissée.

Dans les deux cas, le point C d'affixe $c = \frac{b}{2}$ est un point de l'axe Δ de cet antidéplacement ; en effet C est le milieu de $[Og_b(O)]$.

- Si b est nul, le point C est confondu avec O qui est fixe et g_0 est une réflexion, son axe Δ est la droite passant par O et faisant un angle de $\frac{\pi}{8}$ avec l'axe des abscisses (voir en 2.1).

• Si b n'est pas nul, posons $b = ke^{i\beta}$ et notons B le point d'affixe b .
Soit $c' = g_b(c) = k(\frac{1}{2}e^{i\pi/4}e^{-i\beta} + e^{i\beta})$. Le point C est fixe si et seulement si on a $c' = c$. Or on a :

$$2(c' - c) = k(e^{i\pi/4}e^{-i\beta} + e^{i\beta}) = ke^{i\beta}(e^{i\pi/4}e^{-2i\beta} + 1)$$

Dans le cas où b n'est pas nul, C est fixe si et seulement si β vérifie $2\beta = \frac{\pi}{4} - \pi [2\pi]$ c'est-à-dire $\beta = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Soit Δ' la droite passant par O et faisant un angle de $-\frac{3\pi}{8}$ avec l'axe des abscisses. On a donc montré que C est fixe si et seulement si B appartient à la droite Δ' . On remarque que, dans ce cas, C appartient aussi à Δ' .

• En résumé si B appartient à Δ' , g_b admet un point fixe C , c'est la réflexion d'axe Δ passant par O et faisant un angle de $\frac{\pi}{8}$ avec l'axe des abscisses. Evidemment Δ est la médiatrice de $[OB]$ et donc perpendiculaire à Δ' .

• Quand B n'appartient pas à Δ' , C n'est pas fixe et g_b n'a alors aucun point fixe, c'est une symétrie glissée d'axe Δ passant par O et faisant un angle de $\frac{\pi}{8}$ avec l'axe des abscisses. Le vecteur de la translation est $\overrightarrow{CC'}$, il dirige l'axe et son affixe est $d = \frac{1}{2}k(e^{i\pi/4}e^{-i\beta} + e^{i\beta})$. On peut écrire

$$d = \frac{1}{2}ke^{i\pi/8} \left(e^{i(\frac{\pi}{8}-\beta)} + e^{i(\beta-\frac{\pi}{8})} \right) = ke^{i\pi/8} \cos \left(\frac{\pi}{8} - \beta \right)$$

Dans cette expression, on voit clairement que l'argument de d est $\frac{\pi}{8}$

3.3. Exercices.

- (1) Dans cet exercice, il s'agit de déterminer le type d'une isométrie donnée en écriture complexe et ses éléments caractéristiques.

WIMS : Isométries en complexes

- (2) Dans celui-ci, on s'intéresse aux points fixes de la transformation.

WIMS : Points fixes d'une isométrie

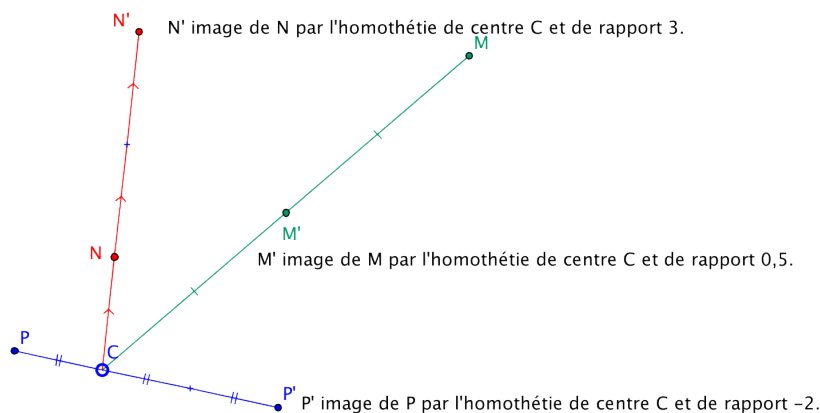
4. HOMOTHÉTIE

Nous commençons l'étude des transformations qui conservent les rapports des longueurs par celle de la plus simple d'entre elles, l'homothétie.

4.1. Définition.

Définition 4.1. Soient C un point du plan \mathcal{P} et λ un réel non nul différent de 1. On appelle *homothétie de centre C* et de rapport λ , et on note $h(C, \lambda)$, l'application du plan affine \mathcal{P} dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{CM'} = \lambda \overrightarrow{CM}$.

Si c est l'affixe de C , l'écriture complexe de $h(C, \lambda)$ est $z' = \lambda(z - c) + c$.



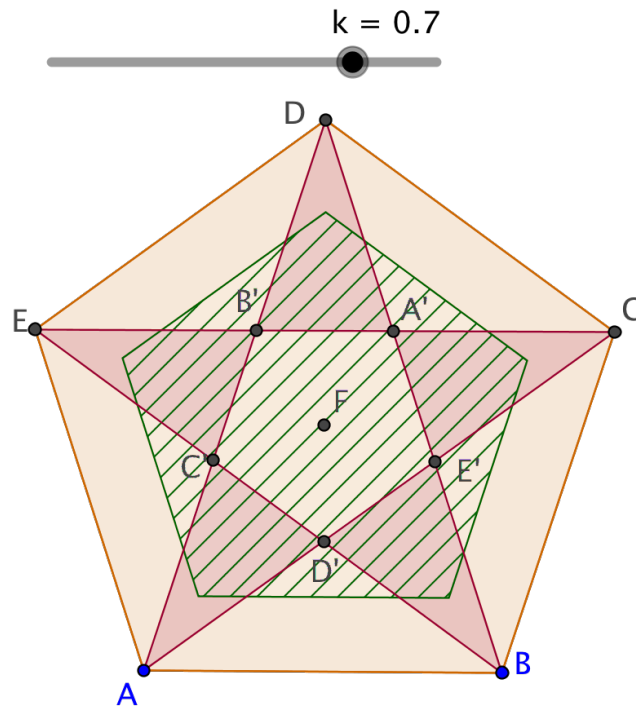
Exemple 1. La symétrie centrale de centre C est l'homothétie de centre C de rapport -1 : $\sigma_C = h(C, -1)$. On a déjà vu son expression complexe en 2.1.

4.2. **Figure mobile.** Sur la figure mobile (merci à Chantal Causse), l'image du F bleu par l'homothétie de centre I et de rapport k (qui peut varier grâce au curseur) est le F vert. Vous pouvez déplacer tous les objets rouges.

Lien pour une figure mobile : <http://ggbm.at/rZBee7Tx>

4.3. **Homothétique d'un pentagone.** Le polygone hachuré en vert est l'image du grand pentagone orange par l'homothétie de centre F et de rapport k donné par le curseur. On remarque qu'il est régulier et que ses côtés sont parallèles à ceux du grand.

La figure mobile est disponible dans le document WIMS : Géométrie du plan complexe à cette WIMS : page.



4.4. Propriétés.

Proposition 4.1. Soient λ un réel non nul différent de 1, A , B et C des points du plan.

- (1) Une homothétie admet son centre comme unique point fixe.
- (2) L'application $h(C, \lambda)$ multiplie les longueurs par $|\lambda|$. De ce fait, elle conserve les rapports de longueur.
- (3) L'inverse de $h(C, \lambda)$ est $h(C, \lambda^{-1})$.
- (4) Une homothétie transforme une droite \mathcal{D} en une droite \mathcal{D}' parallèle \mathcal{D} .
- (5) Une homothétie conserve les milieux. Si h est une homothétie, l'image par h du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[h(A)h(B)]$.
- (6) Les droites invariantes par $h(C, \lambda)$ sont celles passant par son centre C .

Pour la démonstration de ces propriétés, on renvoie à celles des propriétés de la symétrie centrale (voir WIMS : propriétés des symétries centrales et WIMS : droites invariantes dans le cours Isométries de plan.)

4.5. Exercices.

— Exercice de calcul

WIMS : Image par homothétie ou translation

- Exercices graphiques
 - WIMS : Image de points par une homothétie
 - WIMS : Image d'un triangle par une homothétie (1)
 - WIMS : Image d'un triangle par une homothétie (2)

5. SIMILITUDES

On étudie maintenant les transformations $R_{a,b}$ et $S_{a,b}$ dans le cas où a n'est plus nécessairement de module 1.

5.1. Définitions et propriétés.

Définition 5.1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on appelle *similitude* la composée d'une isométrie et d'une homothétie. La similitude est dite *directe* si l'isométrie est *positive*, *indirecte* si l'isométrie est *négative*.

Une similitude est donc de la forme $R_{a,b}$ si elle est directe ou $S_{a,b}$ si elle est indirecte.

Réciproquement, l'application $R_{a,b}$ (resp. $S_{a,b}$) est une similitude directe (resp. indirecte). En effet, quand on la compose par l'homothétie $R(|a|^{-1}, 0)$ de centre O et de rapport $|a|^{-1}$, on obtient une isométrie positive (resp. négative).

$$|a|^{-1}(az + b) = \left(\frac{a}{|a|}z + \frac{b}{|a|} \right)$$

Proposition 5.1. Les similitudes directes du plan complexe sont les transformations $R_{a,b}$ (avec $a \neq 0$ et b des nombres complexes). Les similitudes indirectes du plan complexe sont les transformations $S_{a,b}$ (avec $a \neq 0$ et b des nombres complexes).

Définition 5.2. On appelle *rapport de la similitude* la valeur absolue du rapport de l'homothétie, il vaut $|a|$ dans l'écriture complexe.

5.2. Exemples. Voici quelques exemples de similitudes et une remarque importante sur la décomposition d'une similitude.

Exemples 1.

- Les isométries sont des similitudes de rapport 1.
- L'homothétie $h(O, -2)$ est une similitude de rapport 2, elle est la composée de $h(O, 2)$ et la symétrie centrale σ_O .

Remarque 3. Si a n'est pas réel, $R_{a,b}$ est la composée de la rotation $R_{a',b'}$ avec $a' = a/|a|$ et $b' = b/|a|$ et de l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$.

$$R_{a,b}(z) = az + b = |a| \left(\frac{a}{|a|}z + \frac{b}{|a|} \right) = [h(O, |a|) \circ R_{a',b'}](z)$$

Mais cette composition n'est pas commutative. En effet on a :

$$[R_{a',b'} \circ h(O, |a|)](z) = \frac{a}{|a|} (|a|z) + \frac{b}{|a|} = az + \frac{b}{|a|}$$

6. ETUDE DES SIMILITUDES QUI NE SONT PAS DES ISOMÉTRIES

Dans cette partie, on étudie les similitudes qui ne sont pas des isométries, c'est-à-dire leur rapport est différent de 1.

6.1. Décomposition canonique d'une similitude qui n'est pas une isométrie. On va maintenant montrer qu'on peut écrire une similitude qui n'est pas une isométrie comme composée commutative d'une homothétie et d'une isométrie à point fixe.

Proposition 6.1. *Soit s une similitude qui n'est pas une isométrie ($|a| \neq 1$ dans son écriture complexe). Alors s admet un unique point fixe, noté C d'affixe c , appelé centre de la similitude.*

Alors, si λ est le rapport de s , on peut écrire $s = h(C, \lambda) \circ \phi = \phi \circ h(C, \lambda)$ où ϕ est une isométrie admettant C comme point fixe. Cette écriture est appelée décomposition canonique de s .

Démonstration. L'existence et l'unicité du point fixe sont démontrées en 6.2 et en 6.3. Supposons que s fixe le point C d'affixe c .

Si la similitude est directe, pour commencer, alors on a $c = ac + b$ et donc $z' - c = a(z - c)$. Prenons C comme origine ; dans ce nouveau repère, l'affixe Z d'un point vaut $z - c$. On a donc

$$Z' = aZ = |a| \left(\frac{a}{|a|} Z \right) = \frac{a}{|a|} (|a|Z)$$

La similitude $R_{a,b}$ est donc la composée commutative de $h(C, |a|)$ et d'une isométrie (le complexe $\frac{a}{|a|}$ est de module 1) qui fixe la nouvelle origine C , c'est-à-dire une rotation de centre C .

Si s est indirecte, on fait le même calcul sans problème avec des conjugués aux bons endroits et on écrit donc s comme composée de l'homothétie $h(C, |a|)$ et d'une isométrie négative qui fixe C , donc une réflexion. \square

6.2. Point fixe d'une similitude directe qui n'est pas une isométrie. Soit s est une similitude directe $R_{a,b}$ qui n'est pas une isométrie ($|a| \neq 1$). Le point C est fixe par s si et seulement si c vérifie $c = ac + b$; cette équation aux points fixes a une unique solution : $c = b/(1 - a)$ puisque a ne peut être égal à 1.

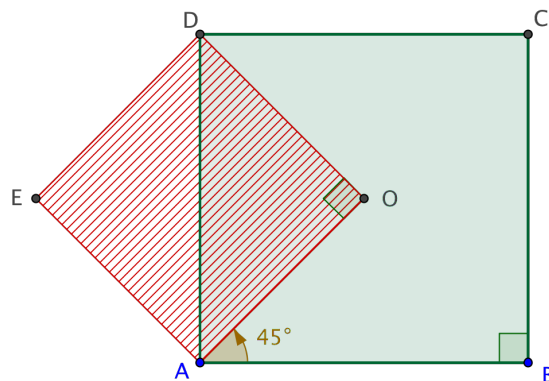
Proposition 6.2. *Dans le cas $|a| \neq 1$, la similitude directe $R_{a,b}$ admet pour centre son unique point fixe C d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et vérifie*

$$R_{a,b} = h(C, |a|) \circ \rho(C, \text{Arg}(a)) = \rho(C, \text{Arg}(a)) \circ h(C, |a|).$$

On note $s(C, \theta, \lambda)$ la similitude composée de $h(C, \lambda)$ et de $\rho(C, \theta)$. Son expression complexe est : $z' = \lambda e^{i\theta}(z - c) + c$

Figure : Image d'un carré par une similitude directe. La figure mobile est disponible dans le document WIMS : Géométrie du plan complexe à cette WIMS : page. Le carré $AODE$ est l'image de $ABCD$ par la similitude de centre A d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\square \text{ rotation de } ABCD \quad \frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



6.3. Point fixe d'une similitude indirecte qui n'est pas une isométrie. Considérons maintenant le cas d'une similitude indirecte $S_{a,b}$ qui n'est pas une isométrie ($|a| \neq 1$) et recherchons les éventuels points fixes de $S_{a,b}$.

Si c est un point fixe de $S_{a,b}$, alors c est un point fixe de $S_{a,b} \circ S_{a,b}$. La réciproque est fautive, il suffit de considérer une réflexion : son carré est l'identité, donc admet tout point comme point fixe.

Déterminons donc les éventuels points fixes de $S_{a,b} \circ S_{a,b}$:

$$S_{a,b} \circ S_{a,b}(c) = c \Leftrightarrow (1 - |a|^2)c = a\bar{b} + b$$

Comme on a supposé $|a| \neq 1$, l'application $S_{a,b} \circ S_{a,b}$ a un unique point fixe C d'affixe $c = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$.

Vérifions que C est point fixe de $S_{a,b}$.

$$\begin{aligned} S_{a,b} \left(\frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2} \right) &= a \overline{\left(\frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2} \right)} + b \\ &= \frac{1}{1 - |a|^2} [a(\bar{a}b + \bar{b}) + (1 - |a|^2)b] \\ &= \frac{1}{1 - |a|^2} (a\bar{b} + b) \end{aligned}$$

On a bien $S_{a,b}(c) = c$.

Proposition 6.3. Dans le cas $|a| \neq 1$, la similitude indirecte $S_{a,b}$ admet comme centre son unique point fixe c d'affixe $\frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$. Elle est la composée de l'homothétie $h(C, |a|)$ et de la réflexion d'axe Δ passant par C et faisant un angle $\alpha = (\text{Arg } a)/2$

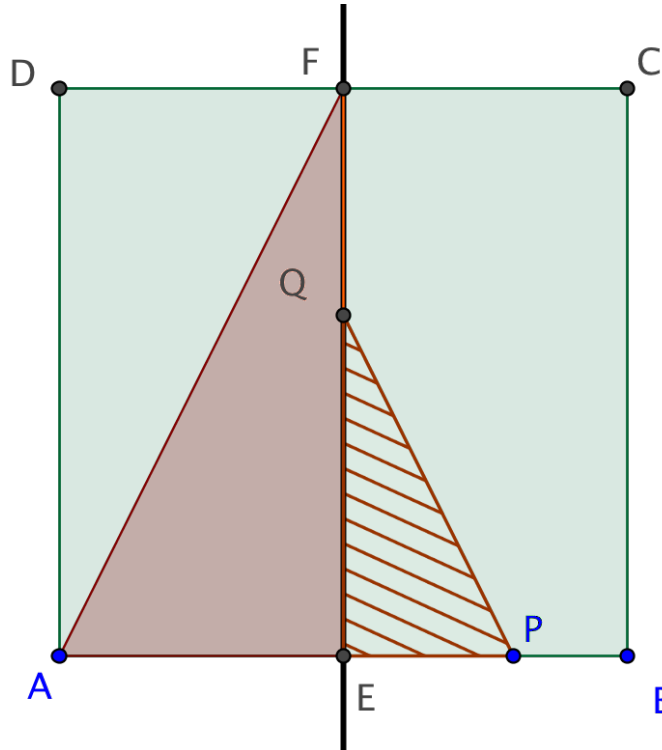
(modulo π) avec l'axe des abscisses.

$$S_{a,b} = h(C, |a|) \circ \sigma_{\Delta} = \sigma_{\Delta} \circ h(C, |a|)$$

On note $S_{a,b} = s(C, \Delta, |a|) = h(C, |a|) \circ \sigma_{\Delta}$. Posons $\theta = ((Ox), \Delta) = \text{Arg} a/2$.

L'expression complexe de $s(C, \Delta, |a|)$ est : $z' = |a|e^{2i\theta}(\bar{z} - \bar{c}) + c$.

Figure : Image d'un triangle par une similitude indirecte. La figure mobile est disponible dans le document WIMS : Géométrie du plan complexe à cette WIMS : page. Le triangle PEQ est l'image de AEF par la similitude de centre E d'axe (EF) et de rapport 0,6.



6.4. **Exercices.** Certains exercices admettent pour le centre ou le vecteur des expressions non simplifiées.

- (1) WIMS : Ecriture complexe d'une similitude directe
- (2) WIMS : Centre et rapport d'une similitude directe
- (3) WIMS : Type d'une similitude directe
- (4) WIMS : Similitude directe définie géométriquement dans un polygone
- (5) WIMS : Type d'une similitude et éléments caractéristiques

7. COMPOSITION DES SIMILITUDES

7.1. **Groupe des similitudes.** Nous savons déjà que toute isométrie est inversible. Invertissons maintenant une similitude qui n'est pas une isométrie.

7.1.1. *Inverse d'une similitude qui n'est pas une isométrie.* Soient λ un réel positif différent de 0 et 1, θ un réel, C un point du plan, Δ une droite passant par C .

Nous avons vu les inverses des isométries dans le document WIMS : Isométries du plan et celui d'une homothétie en 4.4. Comme la décomposition canonique est commutative, nous en déduisons :

Proposition 7.1.

(1) L'inverse de $s(C, \theta, \lambda) = h(C, \lambda) \circ \rho(C, \theta)$ est $s(C, -\theta, \lambda^{-1}) = h(C, \lambda^{-1}) \circ \rho(C, -\theta)$

(2) L'inverse de $s(C, \Delta, \lambda) = h(C, \lambda) \circ \sigma_\Delta$ est $s(C, \Delta, \lambda^{-1}) = h(C, \lambda^{-1}) \circ \sigma_\Delta$.

Nous étudions maintenant la composée de deux similitudes.

7.1.2. *Composées de similitudes.* Nous caractérisons les similitudes comme les applications du plan qui conservent les rapports de longueur.

Proposition 7.2. *Les similitudes sont les applications qui conservent le rapport des longueurs.*

Démonstration. Nous avons défini une similitude comme la composée d'une homothétie et d'une isométrie. Il en résulte facilement qu'une similitude conserve le rapport des longueurs. En effet, soit s une similitude de rapport λ et deux points M , N (resp. P et Q) distincts alors des égalités $s(M)s(N) = \lambda MN$ et $s(P)s(Q) = \lambda PQ$, on déduit $\frac{s(M)s(N)}{s(P)s(Q)} = \frac{MN}{PQ}$.

Réciproquement, soit une application ψ du plan qui conserve le rapport des longueurs. Alors pour deux points quelconques M et N (resp. P et Q) distincts, on peut écrire $\frac{\psi(M)\psi(N)}{\psi(P)\psi(Q)} = \frac{MN}{PQ}$. On en déduit l'égalité de rapports :

$$\frac{\psi(M)\psi(N)}{MN} = \frac{\psi(P)\psi(Q)}{PQ}.$$

Notons λ la valeur commune des rapports $\frac{\psi(M)\psi(N)}{MN}$. On a donc montré que ψ multiplie les longueurs par λ ; on en déduit que $h(O, \lambda^{-1}) \circ \psi$ est une isométrie donc ψ est une similitude. \square

De cette caractérisation des similitudes, nous déduisons que la composée de deux similitudes est une similitude. Plus précisément, comme une similitude multiplie les longueurs par son rapport, le rapport de la composée de deux similitudes est une similitude de rapport le produit des rapports.

7.1.3. *Groupe des similitudes.* Pour la définition d'un groupe et des exemples, consultez le document WIMS : Isométries du plan. Des deux paragraphes précédents on déduit :

Proposition 7.3. *L'ensemble des similitudes du plan complexe est un groupe pour la loi de composition.*

7.2. Similitudes et angles orientés.

Proposition 7.4. *Une homothétie conserve les angles orientés.*

Démonstration. Soit un réel λ différent de 0 et 1 et C un point du plan. On considère trois points distincts M , P et Q et leurs images M' , P' et Q' par $h(C, \lambda)$. La relation de Chasles et la définition de $h(C, \lambda)$ permettent d'écrire :

$$\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{CP'} - \overrightarrow{CM'} = \lambda(\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CM}) = \lambda\overrightarrow{MP}$$

On en déduit que l'angle orienté $(\overrightarrow{M'P'}, \overrightarrow{M'Q'})$ est égal à l'angle $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})$, on peut donc affirmer qu'une homothétie conserve les angles orientés. \square

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 7.5.

- (1) *Une similitude directe conserve les angles orientés.*
- (2) *Une similitude indirecte conserve les angles géométriques et transforme un angle orienté en son opposé.*

En considérant l'action des similitudes sur les angles orientés, on montre la proposition suivante.

Proposition 7.6.

- (1) *La composée de deux similitudes directes (ou de deux similitudes indirectes) est une similitude directe.*
- (2) *La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.*

Corollaire 7.7. *L'ensemble des similitudes directes du plan complexe est un groupe pour la loi de composition.*

Nous allons préciser les éléments caractéristiques de la composée de deux similitudes directes.

7.3. Composées de similitudes directes. Soient deux réels λ et λ' différents de 0 et 1, deux angles θ et θ' et deux points C et C' .

La composée $\psi = s(C', \theta', \lambda') \circ s(C, \theta, \lambda)$ a pour écriture complexe :

$$z' = \lambda' e^{i\theta'} (\lambda e^{i\theta} (z - c) + c - c') + c'$$

Nous nous intéressons principalement au coefficient de z : $a = \lambda' e^{i\theta'} \lambda e^{i\theta} = \lambda' \lambda e^{i(\theta+\theta')}$ qui indique que le rapport de ϕ est $\lambda'\lambda$ (nous le savions déjà) et son angle la somme de angles θ et θ' .

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

Proposition 7.8. *Soient deux réels λ et λ' différents de 0 et 1, deux angles θ et θ' et deux points C et C' .*

- *Si $\theta + \theta'$ n'est pas nul alors la composée $s(C', \theta', \lambda') \circ s(C, \theta, \lambda)$ est la similitude $s(\Omega, \theta + \theta', \lambda\lambda')$ dont on aura à déterminer le centre Ω .*

- Si $\theta + \theta'$ n'est pas nul et que $\lambda'\lambda$ vaille 1, la similitude composée est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.
- Si $\theta + \theta'$ est nul et $\lambda'\lambda$ différent de 1, la composée $s(C', \theta', \lambda') \circ s(C, \theta, \lambda)$ est une homothétie de rapport $\lambda'\lambda$ dont on aura à déterminer le centre.
- Si $\theta + \theta'$ est nul et $\lambda'\lambda$ égal à 1, la composée $s(C', \theta', \lambda') \circ s(C, \theta, \lambda)$ est une translation.

Corollaire 7.9. *L'ensemble des homothéties et des translations est un groupe pour la loi de composition.*

Démonstration. On savait déjà que les translations forment un groupe ; la proposition précédente permet d'affirmer que la composée d'une translation et d'une homothétie est une homothétie et que la composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation. \square

7.4. Exercices de composition. Voici quelques exercices pour s'entraîner à composer des similitudes en écriture complexes.

- (1) WIMS : Composée translation et symétrie centrale
- (2) WIMS : Composée d'homothétie et translation
- (3) WIMS : Composée d'une translation et d'une rotation
- (4) WIMS : Composée de deux rotations

8. PROPRIÉTÉS DES SIMILITUDES

8.1. Figures semblables. Les isométries conservent forme et taille d'une figure. Les similitudes qui ne sont pas des isométries conservent la forme des figures mais seul le rapport des longueurs est conservé.

Définition 8.1. On dit que deux figures sont *semblables* si l'une est la transformée de l'autre par une similitude.

Exercices 2.

WIMS : Figures semblables

WIMS : Ensemble de figures semblables

8.2. Similitude définie par l'image de deux points donnés.

Proposition 8.1. *Soient P et Q (resp. P' et Q') deux points distincts. Il existe une unique similitude directe (resp. indirecte) s telle que l'on ait*

$$s(P) = P' \quad \text{et} \quad s(Q) = Q'.$$

Démonstration. Notons p, p', q et q' les affixes respectives de P, P', Q et Q' .

Recherche de la similitude directe. On sait qu'une similitude directe a pour expression complexe $s(z) = az + b$. On cherche donc deux nombres complexes a et b tels que

$$\begin{cases} p' &= ap + b \\ q' &= aq + b \end{cases}$$

Pour trouver a , on retranche la deuxième équation à la première. Pour trouver b , on multiplie la première (respectivement seconde) équation par q (resp. p) et on retranche la deuxième équation à la première. Comme P et Q sont distincts ($p \neq q$), on obtient :

$$a = \frac{p' - q'}{p - q} \quad \text{et} \quad b = \frac{p'q - q'p}{q - p}$$

Comme P' et Q' sont distincts ($p' \neq q'$), le complexe a n'est pas nul.

L'expression de a signifie que le rapport de la similitude est $|a| = \frac{P'Q'}{PQ}$ et que son angle est $\text{Arg}(a) = (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{P'Q'})$.

Recherche de la similitude indirecte. On sait qu'une similitude indirecte a pour expression complexe $s(z) = a\bar{z} + b$. On cherche donc deux nombres complexes a et b tels que

$$\begin{cases} p' &= a\bar{p} + b \\ q' &= a\bar{q} + b \end{cases}$$

La seule solution est alors

$$a = \frac{p' - q'}{\bar{p} - \bar{q}} \quad \text{et} \quad b = \frac{p'\bar{q} - q'\bar{p}}{\bar{q} - \bar{p}}.$$

A nouveau, le rapport est $|a| = \frac{P'Q'}{PQ}$. □

Exercice 3.

WIMS : Ecriture complexe d'une similitude donnée par l'image de deux points

8.3. Image d'une droite ou d'un cercle. Soient P et Q deux points distincts d'affixes respectives p et q , λ et r deux réels strictement positifs.

En utilisant les propriétés des homothéties, des isométries et de la décomposition canonique, on montre que l'image de (PQ) par une similitude s est la droite $(s(P)s(Q))$.

L'image du cercle $C(P, r)$ de centre P et de rayon r par une similitude s de rapport λ est le cercle $C(s(P), \lambda r)$ en effet on a, pour tout point M du plan, d'affixe m :

$$M \in C(P, r) \iff |m - p| = r \iff |s(m) - s(p)| = \lambda r \iff s(M) \in C(s(P), \lambda r).$$